Лекция 4. Быстрое преобразование Фурье

Оценим количество операций, необходимое для расчета дискретного Фурье разложения функции. Для расчета каждого коэффициента следует произвести порядка N^2 операций . Но в некоторых случаях существует алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ)

Пусть $N=s_1 \cdot s_2$. Требуется подсчитать коэффициенты Фурье:

$$A_n = \frac{1}{N}\sum_{q=0}^{N-1} f_q \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi qn}{N}\right)$$

представим номер коэффициента n в виде: $n=t \cdot s_1+m$, а номер точки в виде:

$$q = \tau \cdot s_2 + p,\ \ \mathrm{p} = 0,\ldots,\mathrm{s}_2 - 1, \mathrm{q} = 0,\ldots,\mathrm{s}_1 - 1$$

Тогда сумма распишется в виде:

$$\sum_{q=0}^{N-1}\ldots \rightarrow \ = \sum_{p=0}^{s2-1}\sum_{\tau=0}^{s1-1} f_q \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi(\tau \cdot s_2 + p)}{s_1 s_2}n\right) =$$

$$\sum_{p=0}^{s2-1}\sum_{\tau=0}^{s1-1} f_q \cdot \exp\left(-i\frac{2\pi(\tau \cdot n)}{s_1}\right)\exp\left(-i\frac{2\pi(p \cdot n)}{s_1 \cdot s_2}\right)$$

так как одна из экспонент не зависит от индекса суммирования p, продолжая равенство, получаем:

$$= \sum_{p=0}^{s2-1} \exp\left(-i\frac{2\pi(p\cdot n)}{N}\right)\cdot\sum_{\tau=0}^{s1-1} f_q\cdot\exp\left(-i\frac{2\pi(\tau\cdot n)}{s_1}\right)$$

За счет операции «вынесения за скобки» достигается экономия количесва операций примерно меньше в s_1 раз

Аналогично, если $N=s_1 \cdot s_2 \cdot s_3$ можно продолжить преобразование дальше. На практике применяют алгоритм БПФ , когда $N=2^n$, при этом количество операций оценивается примерно как $N \ln N$.

Разложим фунцию, заданную на интервале [0,l] в ряд Фурье:

$$f(x)=\sum_n\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{\pi n\xi}{l}\right)\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}+\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{\pi n\xi}{l}\right)\cdot\sin\frac{\pi nx}{l}=$$

$$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sum_{n=0}^{\infty}f(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}(x-\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}hF(hn)$$

если при $l\to\infty$ величину $h=\pi/l$ трактовать как шаг разбиения, то сумму можно толковать как Риманову сумму для функции

$$F(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\lambda(x-\xi)f(\zeta)d\xi$$

Формально совершая предельный переход , получаем:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi$$

что представляет собой интегральную формулу Фурье, которую можно переписать в более симметричном виде:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi$$